ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

PHẠM THỊ UYÊN

VỀ LÍ THUYẾT HÀM PHỨC VÀ NGHIỆM CỦA ĐA THỨC

Chuyên ngành: Phương pháp Toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. Trần Việt Cường

THÁI NGUYÊN - 2019

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}, \mathbb{N}^*$	tập các số tự nhiên và các số tự nhiên khác không
$\mathbb{Z}$	tập các nguyên
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{C}$	tập các số phức
$\overline{1,n}$	tập các số tự nhiên $\{1, 2, ..., n\}$
$z, \bar{z}$	số phức z và số phức liên hợp của số phức z
Rez, Imz	phần thực và phần ảo tương ứng của số phức z
$\square$	kết thúc chứng minh của định lí, hệ quả, và lời giải

Lời nói đầu

Giải tích phức cổ điển là lý thuyết về các hàm của một biến phức, là một trong những nhánh trong toán học, có nguồn gốc từ thế kỷ 18 và chỉ trước đó. Nó rất hữu ích trong nhiều ngành toán học, bao gồm hình học đại số, lý thuyết số, tổ hợp phân tích, toán học ứng dụng; cũng như trong vật lý, bao gồm các nhánh của thủy động lực học, nhiệt động lực học và đặc biệt là cơ học lượng tử. Bằng cách mở rộng, giải tích phức cũng có ứng dụng trong các lĩnh vực kỹ thuật như hạt nhân, hàng không vũ trụ, cơ khí và kỹ thuật điện. Trong thời hiện đại, nó đã trở nên rất phổ biến với sự ra đời của hệ động lực phức và hình ảnh của các fractals được tạo ra bởi các hàm chỉnh hình. Một ứng dụng quan trọng khác của giải tích phức trong lý thuyết dây là nghiên cứu các bất biến tuân thủ trong lý thuyết trường lượng tử. Các nhà toán học đã có những đóng góp quan trọng liên quan đến các số phức bao gồm Euler, Gauss, Riemann, Cauchy, Weierstrass, và nhiều hơn nữa trong thế kỷ 20.

Trong toán học, đa thức là một biểu thức bao gồm các biến và các hệ số, chỉ liên quan đến các phép toán cộng, trừ, nhân và lũy thừa số nguyên không âm của các biến. Đa thức xuất hiện trong nhiều lĩnh vực toán học và khoa học. Ví dụ, chúng được sử dụng để hình thành các phương trình đa thức, mã hóa một loạt các bài toán từ cơ bản đến phức tạp trong khoa học; chúng được sử dụng để xác định các hàm đa thức, xuất hiện trong hóa học, vật lý đến kinh tế và khoa học xã hội; chúng được sử dụng trong tính toán và phân tích số để tính gần đúng các hàm khác. Trong toán học nâng cao, đa thức được sử dụng để xây dựng các vòng đa thức và các đại số, các khái niệm trung tâm trong đại số và hình học đại số. Một số đa thức, chẳng hạn như x^2+1, không có nghiệm trong tập số thực. Tuy nhiên, nếu tập hợp các nghiệm được mở rộng thành các số phức, thì mọi đa thức khác hằng số có ít nhất một nghiệm phức; đây là định lí có bản của đại số. Như một hệ quả, bất kỳ đa thức nào có hệ số phức đều có thể được viết dưới dạng tích của các đa thức hệ số phức bậc 1 và số nghiệm phức được tính với bội số của chúng bằng bậc của đa thức.

Luận văn được chia làm hai chương với những nội dung chính như sau:

Chương 1, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản về lí thuyết hàm phức.

Chương 2, chúng tôi áp dụng lí thuyết hàm phức và nghiệm của đa thức giải quyết một số bài toán sơ cấp.

Để hoàn thành luận văn này, ngoài sự nỗ lực học hỏi của bản thân, em đã nhận được rất nhiều sự quan tâm, giúp đỡ. Với tình cảm chân thành em xin gửi lời cảm ơn sâu sắc nhất tới TS. Nguyễn Trường Thanh - người Thầy đã tận tình hướng dẫn, chỉ bảo, truyền đạt những kiến thức và kinh nghiệm quý báu cho em trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn.

Em xin gửi lời cảm ơn đến các thầy cô giáo của trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, những người đã trực tiếp tham gia giảng dạy lớp Cao học Toán K12 khóa 2018 - 2020, các phòng ban chức năng, Khoa Toán - Tin trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ và tạo điều kiện cho em trong thời gian học tập vừa qua.

Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến tập thể lớp K12, gia đình, bạn bè và đồng nghiệp đã luôn động viên, giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành khóa luận này.

Thái Nguyên, ngày 30 tháng 12 năm 2019

Tác giả luận văn

PHẠM THỊ UYÊN

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

Chương 1, chúng tôi trình bày một số kiến thức cơ bản về số phức và hàm phức. Các khái niệm và kết quả trong Chương 1 được tham khảo trong các tài liệu [1, 2, 3, 6].

1.1 Số phức

Định nghĩa 1.1.1. Số phức là biểu thức dạng $a + bi$ trong đó a, b là số thực và $i^2 = -1$. Đối với số phức $z = a + bi$ thì ta nói a là phần thực, b là phần ảo của z, i là đơn vị ảo. Kí hiệu: $a = Rez, b = Imz$
Tập hợp các số phức kí hiệu là C.

$$\mathbb{C} = \{z = a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Nhận xét 1.1.2. *Mỗi số thực a đều được xem như là số phức với phần ảo* $b = 0$.
Số phức $z = a + bi$ *có* $a = 0$ *được gọi là số thuần ảo hay là số ảo.*
Số 0 *vừa là số thực vừa là số ảo.*

Hai số phức bằng nhau:
Hai số phức được gọi là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo tương ứng của chúng bằng nhau.
Mô đun của số phức:
Giả sử $M(a; b)$ là điểm biểu diễn số phức $z = a + bi$ trên mặt phẳng tọa độ.
Độ dài của $|\overrightarrow{OM}|$ chính là mô đun của số phức z. Kí hiệu là $|z|$.
Ta có: $|z| = |\overrightarrow{OM}| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Số phức liên hợp:

Cho số phức $z = a + bi$, ta gọi $a - bi$ là số phức liên hợp của z và kí hiệu là $\overline{z} = a - bi$. Ví dụ: $z = 1 + 2i$ thì $\overline{z} = 1 - 2i$.

Một số tính chất của số phức liên hợp:

- $z \times \overline{z} = a^2 + b^2$ là một số thực.
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

Dạng lượng giác của số phức:

Trong mặt phẳng phức cho số phức z với $z \neq 0$ được biểu diễn bởi vector $\overrightarrow{OM}$ với $M(a; b)$.
Góc lượng giác $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
Số đo của mỗi góc lượng giác trên được gọi là một acgumen của z.
Gọi φ là một acgumen và $r > 0$ là mô đun của số phức $z = a + bi$ khác 0 dạng lượng giác của z là:

$$z = r(a\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Với $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ và φ định bởi $\cos\varphi = ar$ và $\sin\varphi = br$.
Ghi chú:

- $|z| = 1 \leftrightarrow z = (\cos\varphi + i\sin\varphi), \varphi \in \mathbb{R}$
- $z = 0$ thì $|z| = r = 0$ nhưng acgumen của z không xác định xem như tùy ý.

Cấu trúc đại số và một số tính chất khác của số phức:

1. Phép cộng:
   - $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
   - $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.
2. Phép nhân:
   - $z_1 z_2 = z_2 z_1$,
   - $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,
   - $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

3. Phép chia:

   Nếu $z_1 = wz_2,\ z_2 \neq 0, w \in \mathbb{C}$, thì chúng ta kí hiệu phép chia giữa 2 số phức z_1 và z_2, là
   $$\frac{z_1}{z_2} = w.$$

4. Phép lấy căn bậc n

   Nếu $z_0 = w^n,\ w \in \mathbb{C}$, thì chúng ta kí hiệu căn bậc n của số phức z_0 là
   $$\sqrt[n]{z_0} = w.$$

5. Dấu bằng
   $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re\ z_1 & = Re\ z_2, \\ Im\ z_1 & = Im\ z_2. \end{cases}$$

6. Một số tính chất khác: giả sử các số phức sau có biểu diễn
   $$z_1 = x_1 + iy_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),$$
   $$z_2 = x_2 + iy_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2),$$
   và các số phức liên hợp
   $$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1,\ \bar{z}_2 = x_2 - iy_2.$$

   Khi đó

   - $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,\ \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.
   - $\bar{z}_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1),\ \bar{z}_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)$.
   - $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,\ |z_1 z_2| = |z_1||z_2|,\ |z_1\bar{z}_1| = |z_1|^2$.
   - $z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos[\varphi_1 + \varphi_2] + i\sin[\varphi_1 + \varphi_2])$.
   - $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}(\cos[\varphi_1 - \varphi_2] + i\sin[\varphi_1 - \varphi_2])$, với $z_2 \neq 0$.

1.2 Hàm phức

Định nghĩa 1.2.1. Giả sử S là một tập con của $\mathbb{C}$. Hàm $f : S \to \mathbb{C}$ là quy tắc gán với mỗi z trong S một số phức w. Số w được gọi là giá trị của f tại z và được ký hiệu là $f(z)$.

Tập S được gọi là miền xác định của hàm phức $f(z)$. Khi miền xác định không được đề cập, chúng ta quy ước đó là tập lớn nhất có thể để hàm xác định.

Ví dụ 1.2.2. *Một số hàm phức cơ bản.*

1. *Hàm đa thức*

$$P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n, \quad c_i \in \mathbb{C},\ c_n \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots, n.$$

2. *Hàm mũ cơ số e*

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),\ z = x + iy \in \mathbb{C},\ x, y \in \mathbb{R}.$$

3. *Hàm lượng giác*

$$\cos z = \frac{e^z + e^{-z}}{2},\ \sin z = \frac{e^z - e^{-z}}{2i}.$$

1.3 Giới hạn và liên tục

Định nghĩa 1.3.1. Giả sử hàm $f(z)$ được xác định tại tất cả các điểm z trong một lân cận của z_0, có thể không xác định tại z_0. Hàm $f(z)$ được nói là có giới hạn tại z_0 nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Trong trường hợp này, chúng ta kí hiệu

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Định nghĩa 1.3.2. Hàm $f(z)$ được gọi là liên tục tại một điểm z_0 nếu cả ba điều kiện sau đây là thỏa mãn:

(i) $f(z_0)$ xác định,

(ii) $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ tồn tại,

(iii) $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Hàm f được nói là liên tục trên một tập con nếu nó liên tục tại mỗi điểm của tập này.

Ví dụ 1.3.3. *Các hàm đa thức $P(z)$, hàm mũ e^z, và hàm lượng giác $\cos z$, $\sin z$ là liên tục trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.*

1.4 Đạo hàm và hàm giải tích

Định nghĩa 1.4.1. Giả sử hàm biến phức $f(z)$ xác định trên một lân cận của z_0. Hàm $f(z)$ được nói là có đạo hàm tại điểm z_0 nếu giới hạn sau tồn tại hữu hạn

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Trong trường hợp này, chúng ta kí hiệu đạo hàm này bởi $f'(z_0)$ và

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Định nghĩa 1.4.2. Hàm f của biến phức z là giải tích tại điểm z_0 nếu nó có đạo hàm tại mỗi điểm trong của một số lân cận nào đó của z_0.

Tiếp theo, chúng ta giới thiệu điều kiện cần và đủ để tồn tại đạo hàm của hàm phức tại một điểm.

Định lý 1.4.3 (Điều kiện cần để tồn tại đạo hàm)**.** *Giả sử $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ và $f'(z)$ tồn tại ở điểm $z_0 = x_0 + iy_0$. Khi đó, các đạo hàm riêng bậc nhất của u và v phải tồn tại ở (x_0, y_0) và chúng phải thỏa mãn các phương trình Cauchy - Riemann tại (x_0, y_0),*

$$u'_x = v'_y, \quad u'_y = -v'_x.$$

Hơn thế,

$$f'(z_0) = (u'_x + iv'_x)\Big|_{(x_0, y_0)}.$$